

**Nombre de la Maestría**

Ingeniería de sistemas

**Nombre del alumno**

Sergio Vicente Cayuela García

**ID Alumno**

UM83197SY92415

**Nombre del curso**

Ampliación de Física

**Código #**

AFÍ 412

**Nombre del Tutor**

Amanda Gutiérrez

**Fecha**

18 de febrero de 2024

# Ampliación de Física

## Objetivos del Curso:

La asignatura de Ampliación de Física tiene como objetivo profundizar en los conocimientos de física general que debe dominar un estudiante de ingeniería de primer año. Puede considerarse una segunda parte de Fundamentos de Física, asignatura que se debe haber cursado o, al menos, tener convalidada para abordar el estudio de Ampliación de Física. Fundamentos de Física y Ampliación de Física cubren casi el todo el temario habitual de la física general universitaria, tal y como se estudia en diferentes disciplinas técnicas y científicas y en el propio grado de física.

En casi todas las ingenierías, es preciso cierto nivel de física. Los conceptos de física general deben formar parte del bagaje de cualquier ingeniero, ya que serán vitales para su actividad profesional. Como ya hacía Fundamentos de Física, esta asignatura ahonda en terminología básica que luego deberá emplear, por ejemplo, a la hora de conocer las especificaciones de la maquinaria o de entender procesos de medida en entornos industriales.

Por otro lado, la física, como ciencia experimental que es, y las herramientas de que dispone para explicar fenómenos cotidianos, contribuye a formar en los estudiantes capacidades generales, como cuestionarse la información que reciben de distintos medios, las medidas que efectúen en su actividad profesional y, en particular, a mantener una actitud crítica muy positiva, tanto en el ámbito laboral como en el cotidiano.

## Contenidos

### **Tema 1. Ampliación de cinemática y dinámica y elementos matemáticos**

Cinemática avanzada: uso de vectores, derivación e integración  
Aplicaciones de la cantidad de movimiento y su conservación  
Introducción a los tensores en mecánica clásica

### **Tema 2. Estudio del sólido rígido**

Definición de sólido rígido y tipos básicos de movimiento  
Rotación del sólido rígido y sus causas  
Ecuación fundamental de la dinámica de rotación  
Cálculo de momentos de inercia  
Teorema de conservación del momento angular  
Energía cinética de rotación del sólido rígido  
Equivalencia entre magnitudes de dinámica de traslación y rotación

### **Tema 3. Mecánica de fluidos**

Introducción a los fluidos y su estudio  
Definición de densidad  
Presión. Ley de Pascal  
Principio de Arquímedes. Flotabilidad  
Fluidos en reposo: ecuaciones básicas  
Fluidos en movimiento. Ecuación de Bernoulli  
Problemas resueltos

### **Tema 4. Movimientos periódicos y oscilaciones**

Introducción a los movimientos periódicos  
Estudio del movimiento armónico simple  
Péndulos  
Oscilaciones amortiguadas  
Oscilaciones forzadas

### **Tema 5. Movimiento ondulatorio**

Introducción a los fenómenos ondulatorios  
Descripción del movimiento ondulatorio  
Energía asociada al movimiento ondulatorio  
Propiedades de las ondas

### **Tema 6. Acústica**

Ondas sonoras y sus características  
Intensidad del sonido. Concepto de decibelio  
Interferencias en ondas sonoras  
Ondas sonoras estacionarias y sus aplicaciones  
Efecto Doppler y su aplicación al sonido

### **Tema 7. Ondas electromagnéticas Introducción a la relatividad especial**

Invariabilidad de las leyes físicas. Postulados de Einstein  
Relatividad de la simultaneidad de los sucesos  
Relatividad del tiempo  
Relatividad de las longitudes  
Transformaciones de Lorentz  
Cantidad de movimiento y energía relativistas

### **Tema 8. Ondas electromagnéticas**

Introducción a los fenómenos electromagnéticos  
Descripción de las ondas electromagnéticas  
Ondas electromagnéticas estacionarias  
Energía de las ondas electromagnéticas  
Verificaciones experimentales de las ondas electromagnéticas  
Espectro electromagnético

### **Tema 9. Estudio de la luz y su propagación**

Naturaleza de la luz. Principio de Huygens  
Reflexión y refracción. Ley de Snell  
Polarización de la luz

### **Tema 10. Interferencias y difracción**

Conceptos de interferencias  
Interferencia de la luz procedente de dos fuentes  
Interferómetro de Michelson  
Concepto de difracción  
Difracción por una sola ranura y patrones de intensidad  
Redes de difracción

### **Tema 11. Elementos de óptica geométrica**

Definiciones previas  
Reflexión y refracción en superficies planas  
Reflexión y refracción en una superficie esférica  
Ecuaciones de la óptica geométrica

## **Tema 12. Introducción a la instrumentación óptica**

Lentes

Lentes delgadas

Telescopios ópticos

Microscopios ópticos

Espectrómetros ópticos

## **Tema 13. Orígenes de la mecánica cuántica**

Introducción

La cuantización de la energía como explicación de fenómenos que la física clásica no pudo explicar

Espectroscopía y primeros modelos atómicos

Elementos de la mecánica cuántica

## **Tema 14. Física atómica y nuclear**

Modelos modernos del átomo. Átomo de hidrógeno

Orbitales y números cuánticos

Interpretación de los números cuánticos

Principio de exclusión de Pauli y niveles atómicos

Introducción al estudio del núcleo atómico

Características de los núcleos atómicos.

Radiactividad: tipos de emisiones y estabilidad nuclear

Estudio cuantitativo de los procesos nucleares

## Metodología



Las **actividades formativas** de la asignatura se han elaborado con el objetivo de adaptar el proceso de aprendizaje a las diferentes capacidades, necesidades e intereses de los alumnos.

Las actividades formativas de esta asignatura son las siguientes:

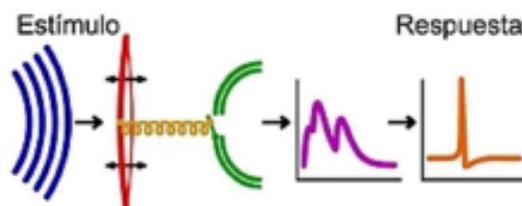
- **Trabajos y Lecturas.** Se trata de actividades de diferentes tipos: reflexión, análisis de casos, prácticas, etc. Además de **análisis de textos** relacionados con diferentes temas de la asignatura.

## Actividad: Acústica



### Características del sonido

**Sonido:** todo tipo de onda mecánica longitudinal que se origina por la vibración de objetos en el seno de un medio elástico. La parte de la física que estudia los sonidos es la acústica.



Representación esquemática del oído, propagación del sonido. Azul: ondas sonoras. Rojo: tímpano. Amarillo: Cóclea. Verde: células de receptores auditivos. Púrpura: espectro de frecuencia de respuesta del oído. Naranja: impulso del nervio.

La capacidad de percepción del oído humana se encuentra entre los 20 y los 20.000 Hz aprox.

### Mecanismos de propagación del sonido

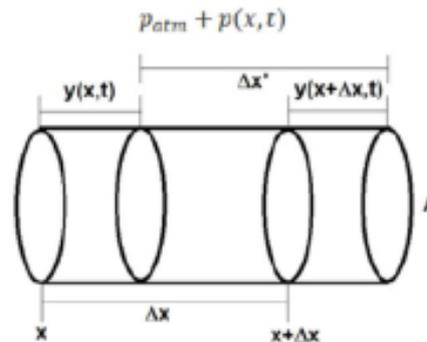
El sonido se origina por variaciones de presión o densidad de un medio debidas a las vibraciones de un objeto que es la fuente del sonido. Estas variaciones hacen que se desplacen las moléculas, creen una vibración.

Hay que tener en cuenta que las ondas sonoras necesitan un medio para propagarse.

## Descripción de las ondas sonoras como perturbaciones en la presión

El término  $p(t,x)$  es la diferencia de la presión en cada punto con respecto al valor de  $p_{atm}$  (presión atmosférica)

Debemos tener en cuenta que el fluido que sufre la perturbación tiene un módulo de compresibilidad ( $K$ ), y este relaciona un cambio en la presión con el cambio de volumen relativo que experimenta.



## Velocidad de propagación del sonido

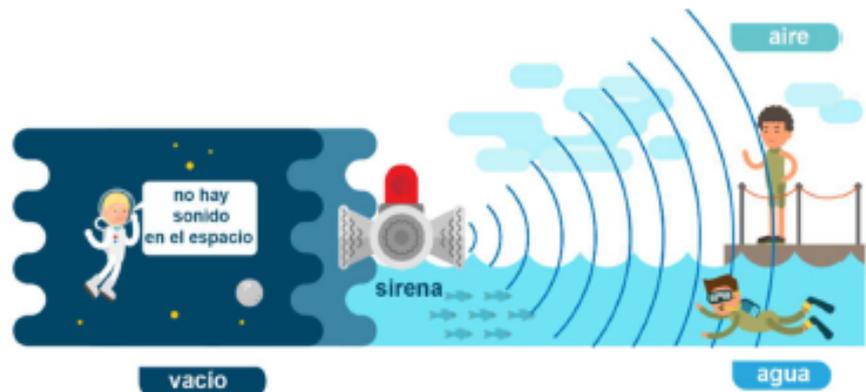
Podemos observar la velocidad de propagación en tres medios:

1. Fluidos
2. Gases
3. Sólidos

### 1. Fluidos

El teorema que relaciona impulso y cantidad de

movimiento dice que el impulso aplicado a un cuerpo es igual a la variación de la cantidad de movimiento del cuerpo. Y esto nos lleva poder calcular la velocidad del sonido en fluidos.



## 2. Gases

La velocidad del sonido en un gas no es constante, si no que depende de la temperatura. Además, debemos tener en cuenta que los gases son muy compresibles y su densidad cambia al modificarse la presión.

Medio	v (m/s)
Gases a 0° C	
Aire	331
Dióxido de carbono	259
Oxígeno	316
Helio	965
Hidrógeno	1.290
Líquidos a 20° C	
Etanol	1.190
Mercurio	1.450
Agua dulce	1.490
Agua de mar	1.540
Tejido humano	1.540
Sólidos (longitudinales o de compresibilidad)	
Caucho vulcanizado	54
Poliétileno	920
Mármol	3.810
Vidrio, Pyrex	5.640
Plomo	1.990
Aluminio	5.120
Acero	5.990

Cuanto mayor sea la densidad de un medio. Mas lenta será la velocidad del sonido. Esto es análogo al hecho de que la frecuencia de un movimiento armónico simple es inversamente proporcional a la masa del objeto que oscila.

## 3. Sólidos

La velocidad de propagación en el seno de una varilla de material sólido.

En los medios sólidos, son las fuerzas que unen entre si las partículas constitutivas del cuerpo las que se encargan de propagar la perturbación de un punto a otro.

## Intensidad del sonido

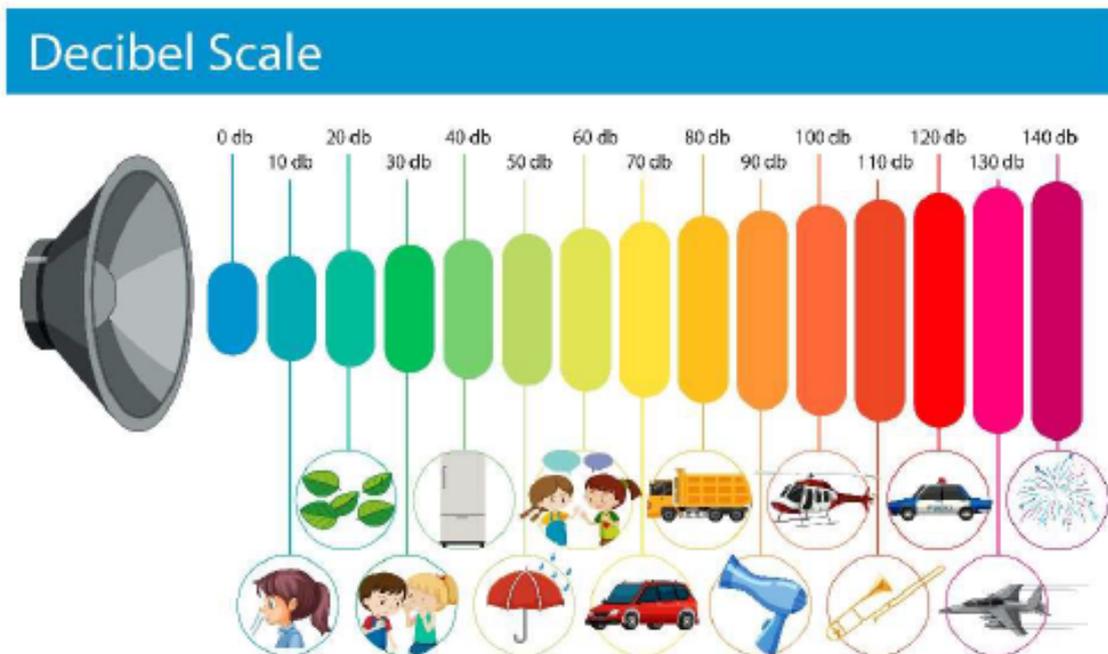
Se define la intensidad como la potencia por unidad de área transportada por una onda. La potencia es la tasa a la que la energía se transfiere por la onda.

La intensidad disminuye a medida que la onda se aleja de la fuente.

La variación de la presión es proporcional a la amplitud de la oscilación, esto es coherente con que la onda sonora la produce alguna vibración; cuanto mayor es su amplitud de presión, más se comprime el aire en el sonido que crea.

El nivel de intensidad se mide en **decibelios (dB)** siendo una unidad adimensional. Se define como la unidad de nivel sonoro que se obtiene tras medir un sonido después de haberlo hecho pasar un filtro que quita parte de las frecuencias muy bajas y altas. A partir de los 120dB hablamos de umbral del dolor, ya que estas son las intensidades mínimas de sonido que provoca dolor.

Si todos los valores se añaden en una escala logarítmica, el resultado será diferente del calculado en una escala lineal. Si se suman dos fuentes con la misma fuerza de sonido, el nivel combinado de presión acústica no se duplica, sino que se incrementa en tres decibelios.

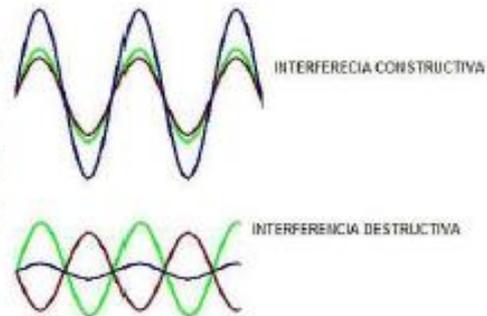


### Interferencias en ondas sonoras

La interferencia en las ondas sonoras se produce cuando dos o más ondas sonoras coexisten en el mismo medio y al mismo tiempo, de modo que en cada punto del espacio se suman amplitudes y se restan.

Tenemos dos tipos de interferencias:

- Si las ondas chocan o se superponen en fases, se obtiene una onda resultante de mayor amplitud que las ondas iniciales. A esto lo llamamos **interferencia constructiva**.
- Decimos que la **interferencia es destructiva** cuando es la superposición de ondas en anti fase. Obtenemos una amplitud menor que las ondas originales.



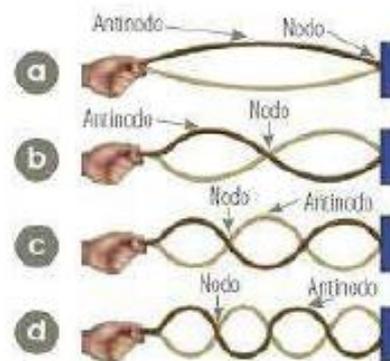
### Ondas sonoras estacionarias

Por definición una onda estacionaria es aquella que se produce cuando, en una región del espacio, interfieren dos ondas de característica similares que viajan en sentidos contrarios. Esto puede suceder en el caso de que una onda encuentre un obstáculo, se refleje e interfiera con la onda incidente.

Los puntos de coordenada  $x$  para los que el desplazamiento vertical es siempre nulo se llaman **nodos** y aquellos para que la amplitud es máxima **antinodos**.

Si lo relacionamos con la presión, los **nodos** son los puntos donde la presión y la densidad no varían, cuando la variación de presión y densidad es máxima son los puntos de **antinodos**.

Un nodo de desplazamiento es un antinodo de presión y viceversa.



## Efecto Doppler

Este fenómeno fue observado por primera vez en las ondas sonoras por el físico austriaco Christian Andreas Doppler (1803 - 1853), en el año 1842, al notar como el tono (frecuencia) del silbido de una locomotora se hacía más agudo al acercarse y más grave cuando se alejaba.

El efecto Doppler es el cambio de frecuencia percibida de cualquier movimiento ondulatorio cuando el emisor, o foco de ondas, y el receptor se desplazan uno respecto a otro.



### Aplicaciones prácticas del efecto Doppler

- **Sirenas de las ambulancias**, aunque una ambulancia se mueva solo a 50 km/h, es posible notar el cambio de un tono agudo a uno grave justo cuando pasa a nuestro lado.
- **Mediciones en astronomía**, presente en aspecto visible de la radiación electromagnética. Si un objeto se aleja, su longitud de onda aumenta produciendo un corrimiento hacia el rojo. Si se acerca, la disminución de la onda produce un corrimiento hacia el azul.
- **Radares de tráfico**, gracias al efecto Doppler miden la velocidad de los coches, ya que el radar envía una señal electromagnética y recibe el rebote, la diferencia permite calcular la velocidad del vehículo.



- Ayuda a la conducción, basados en la ecolocalización. La frecuencia de sonido es tan alta que los humanos no pueden detectarla. Dado que la velocidad es conocida y constante es posible determinar la distancia a la que se encuentra un objeto.

### Formulario

FORMULARIO ACÚSTICA			
CARACTERÍSTICAS DEL SONIDO	Modelización de ondas sonoras	$y(x, t) = A \text{ sen } (kx - \omega t)$	
	ONDAS SONORAS		
	Ondas sonoras	$p_{atm} + p(x, t)$	
	Ondas unidimensionales	$p_T = p_e - KAk \text{ sen}(kx - \omega t)$	
	Perturbación máxima	$p_{max} = KA \frac{2\pi}{\lambda}$	
	Ondas tridimensionales	$P(r, t) = p_0 + \frac{\Delta p_{max}}{r} \text{ sen } (kx - \omega t + \varphi)$	
VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN	Módulo de compresibilidad	$K = - \frac{\Delta p}{V/\Delta V}$	
	Velocidad de propagación en fluidos	$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$	
	Velocidad de propagación en gases ideales	$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$	T temperatura R constante de gases ideales 8.314J/mol*k M peso molecular del gas

	Velocidad de propagación en sólidos	$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \text{ con } \rho = \text{densidad}$	Y es el módulo de Young
INTENSIDAD DEL SONIDO	Intensidad de la onda sinusoidal	$I = \frac{P}{4\pi r^2}$	$I_0 = 10^{-12}$ W/m <sup>2</sup>
	Intensidad de la onda sinusoidal (alternativa)	$I = \frac{v p_{\max}^2}{2K} = \frac{p_{\max}^2}{2\sqrt{\rho K}}$	
	Intensidad onda tridimensional	$I = \frac{P}{4\pi r^2}$	
ESCALA DE DECIBELIOS	Nivel de intensidad o de potencia de un sonido	$L = 10 \cdot \log_{10} \frac{I}{I_0}$	Se mide en decibelios (dB)
EFECTO DOPPLER	Observador moviéndose	$f_o = f \left(1 \pm \frac{v_o}{v}\right)$	
	Fuente moviéndose	$f_o = f \frac{1}{\left(1 \pm \frac{v_f}{v}\right)}$	
	Ambos en movimiento	$f_o = \frac{v \pm v_o}{v \pm v_f} f_f$	

## Ejercicio: Resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias con Matlab para ciencia e ingeniería

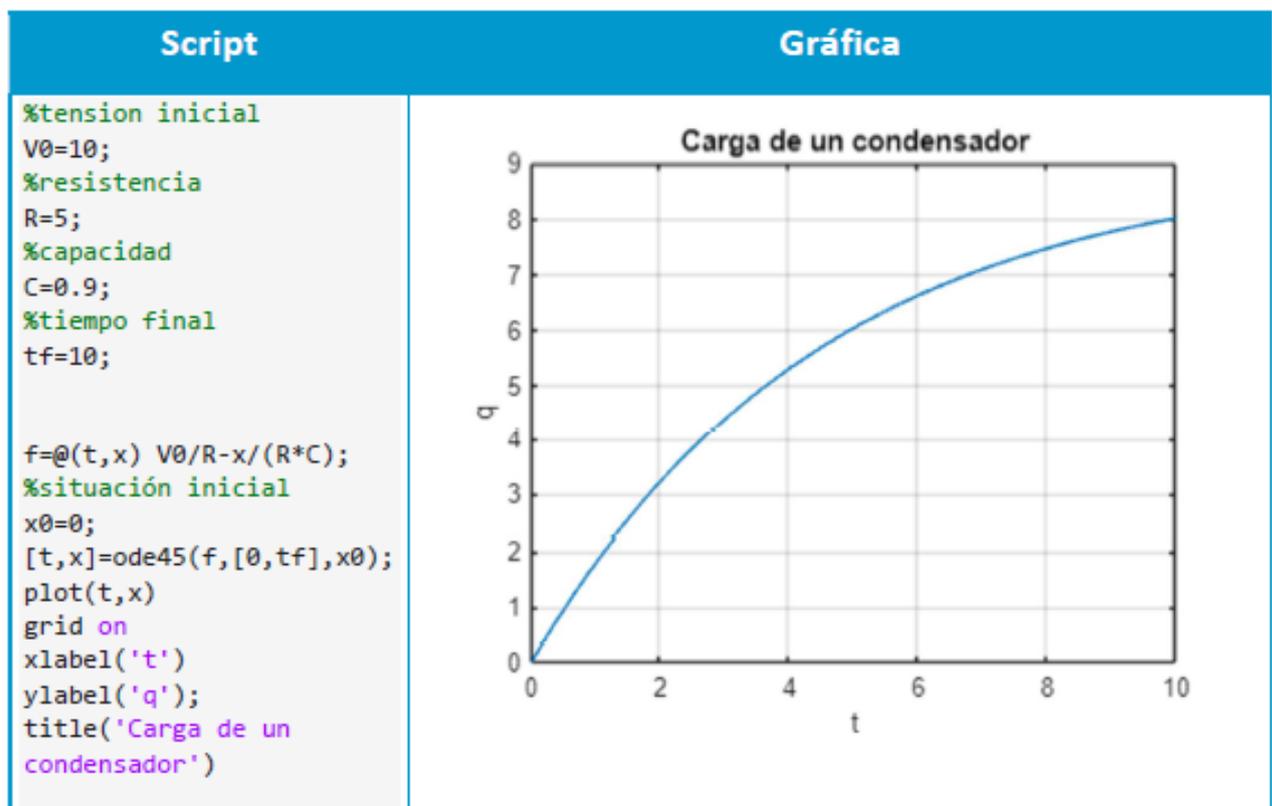
### Ecuación diferencial de primer orden

#### Carga de un condensador

La ecuación que describe la carga de un condensador es:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{V\varepsilon}{R} - \frac{q}{RC}$$

Damos valores a los diferentes parámetros de resistencia, capacidad y tiempo y presentamos el momento para que nos devuelva una gráfica:



## Sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden

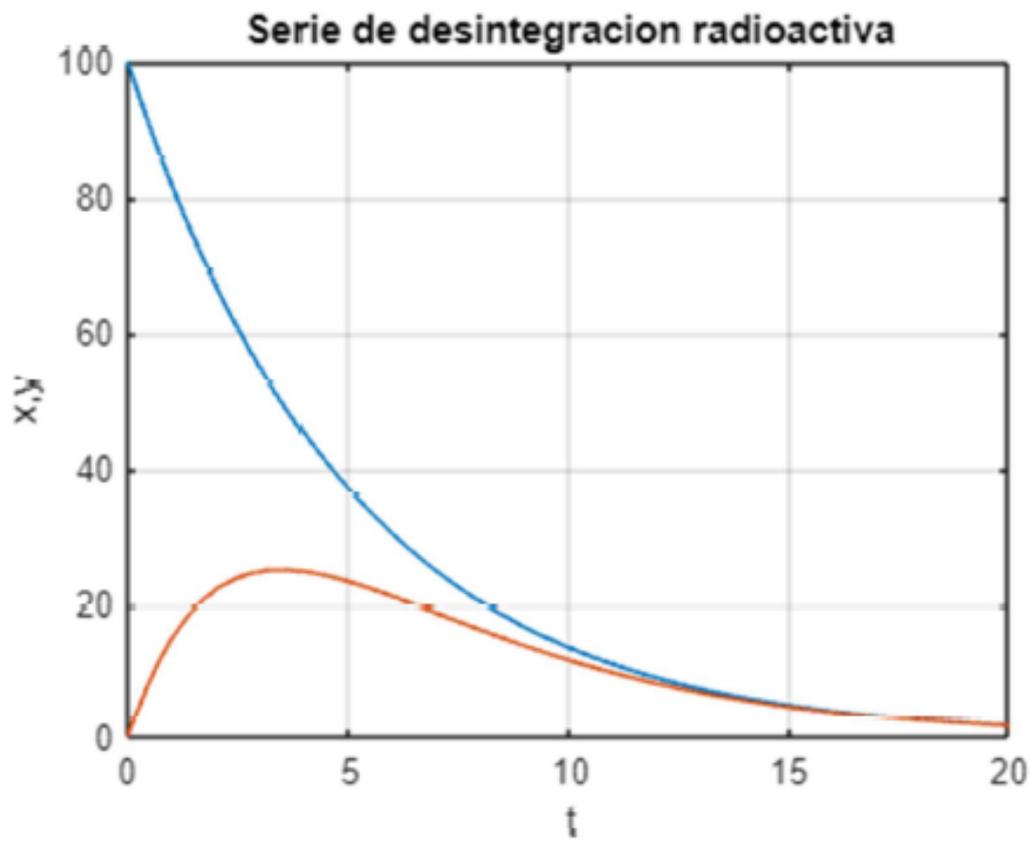
### Serie de desintegración radiactiva

La serie puede ser descrita por un sistema de ecuaciones diferenciales :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax \\ \frac{dx}{dt} = ax - by \end{cases}$$

Se definen las funciones en un fichero .m llamado f\_radioactivo, y después se elabora el script con los valores de los parámetros a y b, su condición inicial y llamamos la función:

Fichero .m	Script
<pre>function z=f_radioactivo(t,x,a,b)     z=[-a*x(1);a*x(1)- b*x(2)]; % x(1) es x, x(2) es y end</pre>	<pre>%parámetro a a=0.2; %parámetro b b=0.4; %condiciones iniciales en el vector x0 %100 es el valor inicial de x, 0 es valor inicial de y x0=[100,0]; %tiempo final, tf tf=20;  fg=@(t,x) f_radioactivo(t,x,a,b); %fg=@(t,x) [-a*x(1);a*x(1)-b*x(2)]; [t,x]=ode45(fg,[0,tf],x0); plot(t,x) grid on xlabel('t') ylabel('x,y'); title('Serie de desintegracion radioactiva')</pre>



## Ecuación diferencial de segundo orden

### Oscilaciones amortiguadas

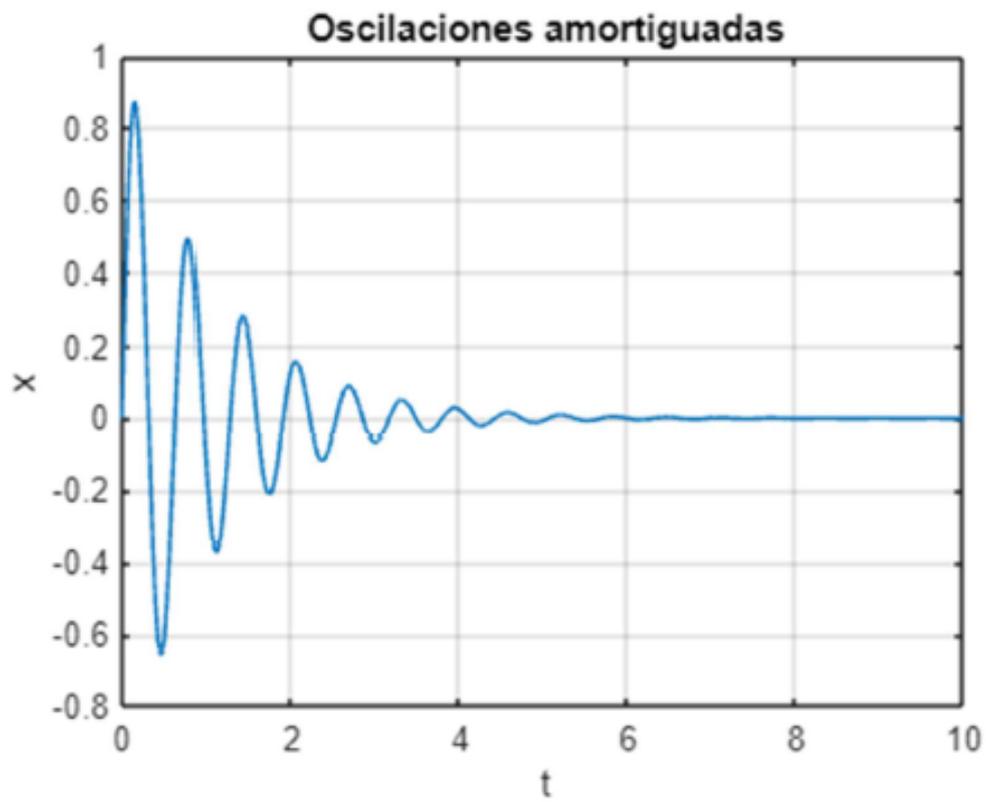
Tenemos las ecuaciones:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + w_0^2 x = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = -2\gamma v - w_0^2 x$$

Fichero .m	Script
<pre>function dr=f_amortiguadas(t, x, g, w0)     dr=zeros(2,1);     dr(1)=x(2);     dr(2)=-2*g*x(2)- w0*w0*x(1); end</pre>	<pre>%frecuencia angular w0=10; %constante rozamiento g=0.9; %condiciones iniciales; % 0 es posición inicial, 10 es velocidad inicial x0=[0,10]; %tiempo final tf=10;  f=@(t,x) f_amortiguadas(t,x,g,w0); [t,x]=ode45(f,[0,tf],x0); plot(t,x(:,1)) grid on xlabel('t') ylabel('x'); title('Oscilaciones amortiguadas')</pre>



## Sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden

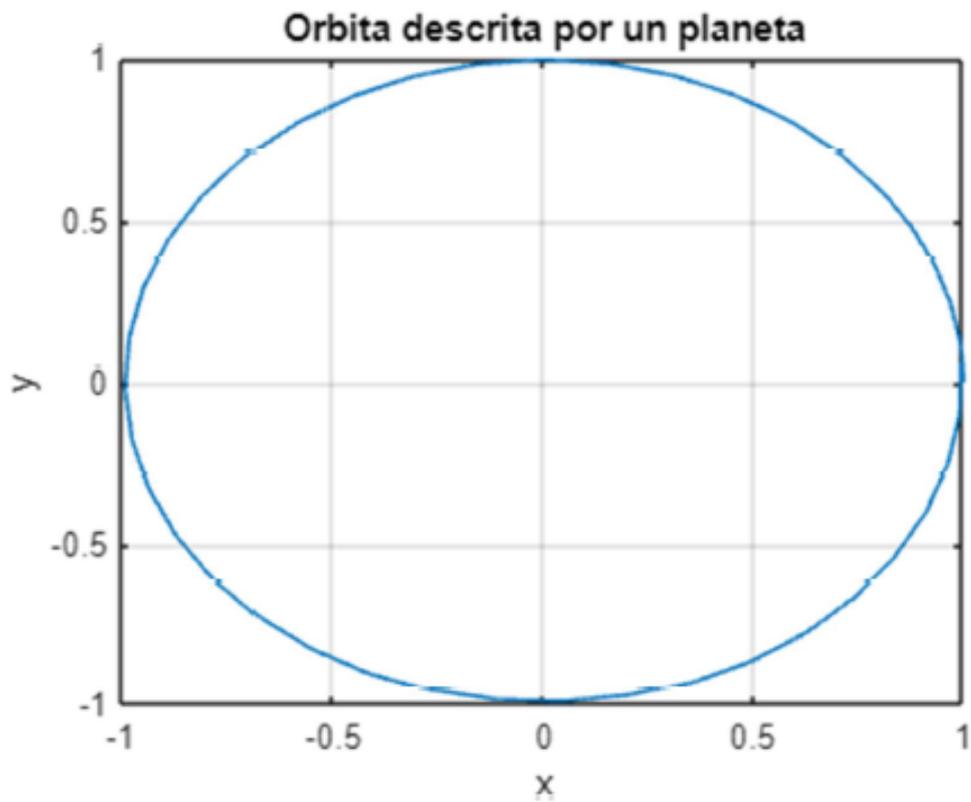
Órbita de un planeta alrededor del Sol o de un satélite artificial alrededor de la Tierra

Para estudiar este movimiento tenemos un sistema de dos ecuaciones de segundo grado:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4\pi^2 \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x \\ \frac{dv_x}{dt} = -4\pi^2 \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{cases}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -4\pi^2 \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = -4\pi^2 \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{cases}$$

Fichero .m	Script
<pre>function dr=f_planeta(t, x)     dr=zeros(4,1);     dr(1)=x(2);     dr(2)=-     4*pi*pi*x(1)/(sqrt(x(1)*x(1)+x(3)*x(3)))^3;     dr(3)=x(4);     dr(4)=-     4*pi*pi*x(3)/(sqrt(x(1)*x(1)+x(3)*x(3)))^3; end</pre>	<pre>%posición inicial x, velocidad x, posición y, velocidad y x0=[1,0,0,6.27]; tf=1; %tiempo final  [t,x]=ode45(@f_planeta,[0,tf],x0); plot(x(:,1),x(:,3)) grid on xlabel('x') ylabel('y'); title('Orbita descrita por un planeta')</pre>



Todos los parámetros de los scripts se han ido cambiando para poder observar los distintos resultados tanto numéricos como gráficos, habiéndose añadido al informe los resultados en las últimas pruebas.

## Actividad: Resolución de problemas sobre momentos de inercia y fluidos

### Objetivos de la actividad

Gracias a esta actividad podrás poner en práctica los conocimientos teóricos adquiridos en las sesiones presenciales virtuales y en las ideas clave para la resolución de distintos problemas relacionados con la mecánica del sólido rígido, la dinámica de fluidos y el movimiento armónico simple. Tendrás que resolver una serie de ejercicios prácticos gracias a los cuales desarrollarás soltura y pondrás a prueba métodos de resolución de tales problemas y de explicación de los resultados.

### Descripción de la actividad.

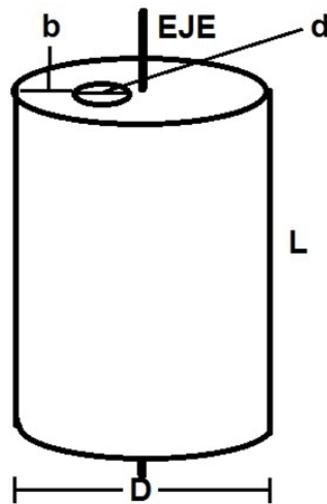
La actividad se compone de cuatro ejercicios que se resolverán de manera independiente.

### Ejercicio 1

Calcula el momento de inercia de un cilindro de diámetro  $D$ , altura  $L$  y densidad  $\rho$ , que tiene, a una distancia  $b$  del borde un agujero cilíndrico de diámetro  $d$ , a través de un eje que pasa por el centro del cilindro grande y es perpendicular a las caras circulares.

NOTA 1: La distancia  $b$  va desde el borde del cilindro de diámetro  $D$  hasta el borde exterior del cilindro de diámetro  $d$ .

NOTA 2: El resultado debería expresarse en función de la densidad de la figura.

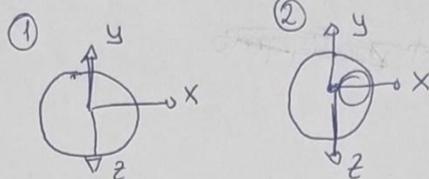


### Ejercicio 1

En primer lugar vamos a descomponer en dos piezas, una el cilindro grande y otra el taladro.

→ Radio del taladro =  $d/2$  → masa =  $M_2$

→ Radio del cilindro grande =  $D/2$  → masa =  $M_1$



① Vamos a realizar el cálculo del momento de inercia de la pieza grande respecto al eje z.

$$I_1 = \frac{1}{2} M_1 \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \left( \rho \cdot H \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot L \right) \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 =$$

$$\boxed{I_1 = \frac{1}{2} \rho H L \left(\frac{D}{2}\right)^4}$$

Sabemos que  $M = \rho \cdot V$  y el volumen del cilindro =  $H \cdot r^2 \cdot h$

② Ahora vamos a calcular el momento de inercia de la pieza 2 el taladro.

Para ello aplicamos el teorema de Steiner.

Situaremos un eje paralelo al z que va a pasar por el centro del taladro.

Tendremos un eje nuevo denominado  $z'$ .

$$\text{eje } z' = \frac{D}{2} - b - \frac{d}{2}$$

$$I_{z'} = I_2 + M_2 \cdot (\text{distancia eje } z')$$

$$I_2 = \frac{1}{2} M_2 \left(\frac{d}{2}\right)^2 + M_2 \left(\frac{D}{2} - b - \frac{d}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \rho \cdot H \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot L \right) \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left( \rho \cdot H \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot L \right) \cdot \left(\frac{D}{2} - b - \frac{d}{2}\right)$$

$$\boxed{I_2 = \frac{1}{2} \rho H L \left(\frac{d}{2}\right)^4 + \left( \rho \cdot H \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot L \right) \cdot \left(\frac{D}{2} - b - \frac{d}{2}\right)}$$

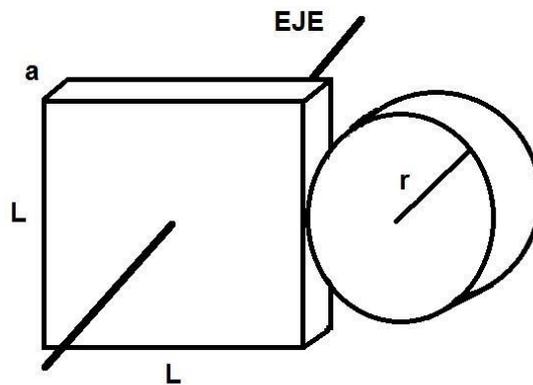
Momento de Inercia Total :

$$I_T = I_1 + I_2$$

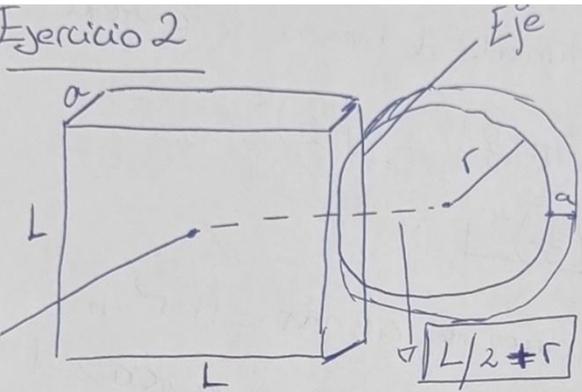
$$I_T = \frac{1}{2} e H L \left(\frac{D}{2}\right)^4 - \left[ \frac{1}{2} e H L \left(\frac{d}{2}\right)^4 + \left( e H \left(\frac{d}{2}\right)^2 L \right) \cdot \left( \frac{D}{2} - b - \frac{d}{2} \right) \right]$$

## Ejercicio 2

Momento de inercia de un paralelepípedo de  $\rho$  y de dimensiones  $L$  por  $L$  por  $a$  que tiene pegado a un lado un cilindro de radio  $r$ , altura  $a$  y densidad también  $\rho$  por un eje que pasa por el centro del paralelepípedo y es perpendicular a su cara superior.



Ejercicio 2



masa paralelepipedo =  $\mu_1$   
 masa cilindro =  $\mu_2$   
 Sabemos que  $\mu = \rho \cdot V$

El momento de inercia será la suma de los momentos de inercia del  $\mu_1$  y  $\mu_2$ .

① Calcular el momento de inercia del paralelepipedo

$$I_1 = \frac{1}{12} \mu_1 (L^2 + L^2) = \frac{1}{12} \mu_1 \cdot 2L^2$$

$$= \frac{1}{12} (\rho \cdot L^2 \cdot a) \cdot 2L^2 = \boxed{\frac{1}{12} \rho \cdot 2L^4 \cdot a} = I_1$$

② Calculamos el momento de inercia del cilindro mediante el teorema de Steiner.

Suponemos un eje imaginario que pasa por el corte del cilindro y va paralelo al eje.

$$I_2 = I_2' + \mu_2 \cdot (\text{distancia entre ejes})^2 = I_2' + \mu_2 \cdot \left(\frac{L}{2} + r\right)^2$$

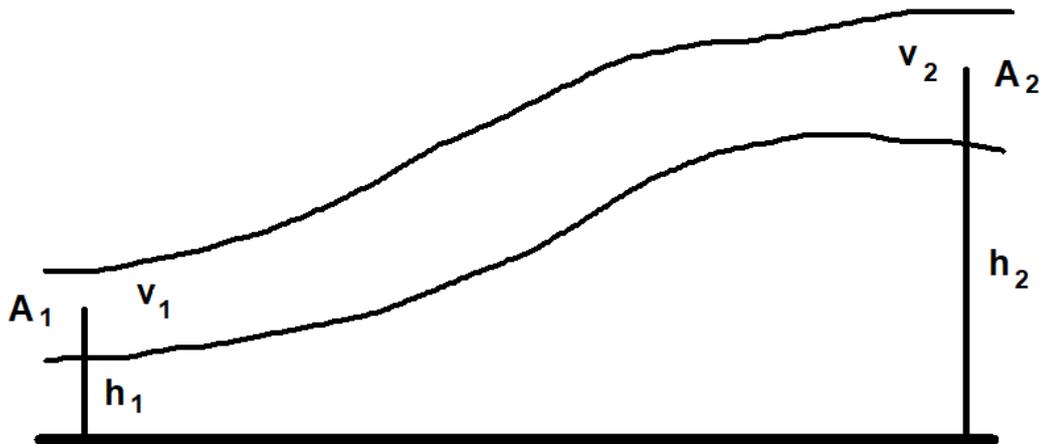
$$I_2' = \frac{1}{2} \mu_2 \cdot r^2 = \frac{1}{2} (\rho \cdot H \cdot r^2 \cdot a) r^2 = \boxed{\frac{1}{2} \rho \cdot H \cdot a \cdot r^4}$$

$$\boxed{I_2 = \frac{1}{2} \rho \cdot H \cdot a \cdot r^4 + (\rho \cdot H \cdot r^2 \cdot a) \cdot \left(\frac{L}{2} + r\right)^2}$$

$$\boxed{I_{\text{total}} = I_1 + I_2 = \frac{1}{12} \rho \cdot 2L^4 \cdot a + \left[ \frac{1}{2} \rho \cdot H \cdot a \cdot r^4 + (\rho \cdot H \cdot r^2 \cdot a) \cdot \left(\frac{L}{2} + r\right)^2 \right] = I_T}$$

### Ejercicio 3

Por la tubería representada en la siguiente figura circula agua, de densidad  $997,13 \text{ kg/m}^3$  (a 25 grados).



Calcular, usando la ecuación de continuidad y la de Bernoulli, los siguientes valores:

- ▶ La velocidad  $v_2$  y el área  $A_2$  sabiendo que  $h_2=10\text{m}$ ,  $h_1=4\text{m}$ ,  $A_1=0,125\text{m}^2$  y  $v_1=10\text{m/s}$ .
- ▶ La velocidad  $v_1$  y el área  $A_1$  sabiendo que  $h_2=2\text{m}$ ,  $h_1=1,5\text{m}$ ,  $A_2=0,025\text{m}^2$  y  $v_2=1\text{m/s}$ .

### Ejercicio 3

①  $V_2 ? A_2 ?$

$$h_2 = 10 \text{ m}$$

$$h_1 = 4 \text{ m}$$

$$A_1 = 0,125 \text{ m}^3$$

$$V_1 = 10 \text{ m/s}$$

$$\rho = 997,13 \text{ kg/m}^3$$

•  $P_1$  y  $P_2$  consideramos que son constantes por lo tanto en la ecuación de Bernoulli se van.

$$A_1 \cdot V_1 = A_2 \cdot V_2$$

$$P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_1^2 + \rho \cdot g \cdot h_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 + \rho g h_2$$

$$\frac{1}{2} \cdot 997,13 \cdot 10^2 + 997,13 \cdot 9,8 \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 997,13 \cdot V_2^2 + 997,13 \cdot 9,8 \cdot 10$$

$$49856,5 + 39087,5 = 498,56 V_2^2 + 97718,7$$

$$88944 - 97718,7 = 498,56 V_2^2$$

$$V_2 = \sqrt{-177,05} \text{ m/s}$$

↑ no se puede calcular

②  $V_1 A_1 ? A_2 = 0,025 \text{ m}^3$   
 $h_2 = 2 \text{ m}$   $V_2 = 1 \text{ m/s}$   
 $h_1 = 1,5 \text{ m}$

$$\frac{1}{2} \cdot 997,13 \cdot V_1^2 + 997,13 \cdot 9,8 \cdot 1,5 = \frac{1}{2} \cdot 997,13 \cdot 1^2 + 997,13 \cdot 9,8 \cdot 2$$

$$498,565 \cdot V_1^2 + 14658 = 498,56 + 19543,75$$

$$V_1^2 = \frac{5384,31}{498,565} = \sqrt{10,79} =$$

$$V_1 = 3,28 \text{ m/s}$$

$$A_1 \cdot 3,28 = 0,025 \cdot 1$$

$$A_1 = 0,0076 \text{ m}^3$$

#### Ejercicio 4

Usando que la densidad del agua es  $997,13 \text{ kg/m}^3$  (a 25 grados), calcular cuales de los siguientes objetos flotarán:

- ▶ Caja metálica de 3000 kg que tiene hundido un volumen de 1250 litros.
- ▶ Caja de madera de 200 kg que tiene un volumen sumergido de 50 litros.
- ▶ Bola maciza de 1 metro de radio y 650 kg de masa.

### Ejercicio 4

$$\rho_{\text{agua}} = 997,13 \text{ kg/m}^3$$

$$\textcircled{1} \text{ Caja metálica} \Rightarrow m_1 = 3000 \text{ kg} \quad V = 1250 \text{ L}$$

$$\textcircled{2} \text{ Caja madera} \Rightarrow m_2 = 200 \text{ kg} \quad V = 50 \text{ L}$$

$$\textcircled{3} \text{ Bola maciza} \Rightarrow m_3 = 650 \text{ kg} \quad R = 1 \text{ m.}$$

$$\textcircled{1} m_1 = 3000 \text{ kg}$$

$$V_1 = 1250 \text{ L} \cdot \frac{1 \text{ dm}^3}{1 \text{ L}} \cdot \frac{1 \text{ m}^3}{1000 \text{ dm}^3} = 1250 \cdot \frac{1}{1000} = \boxed{1,25 \text{ m}^3}$$

$$\rho_1 = \frac{3000}{1,25} = \boxed{2400 \text{ kg/m}^3}$$

$$\textcircled{2} m_2 = 200 \text{ kg}$$

$$V_2 = 50 \text{ L} \cdot \frac{1 \text{ dm}^3}{1 \text{ L}} \cdot \frac{1 \text{ m}^3}{1000 \text{ dm}^3} = 50 \cdot \frac{1}{1000} = \boxed{0,05 \text{ m}^3}$$

$$\rho_2 = \frac{200}{0,05} = \boxed{4000 \text{ kg/m}^3}$$

$$\textcircled{3} m_3 = 650 \text{ kg}$$

$$R = 1 \text{ m.}$$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 1^3 = \boxed{4,188 \text{ m}^3}$$

$$\rho = \frac{650}{4,188} = \boxed{155,2 \text{ kg/m}^3}$$

Según estos resultados la caja metálica y la caja de madera se hunden, porque la densidad es mayor que la densidad del agua. La bola maciza no se hundirá porque su densidad es menor a la del agua.

## Bibliografía

- Bueche, F. J. y Hecht, E. (2007). *Física general*. Madrid: McGraw-Hill.
- Marion, J. B. (1998). *Dinámica clásica de las partículas y sistemas*. Barcelona: Reverté.
- Ortega, M. R. (2011). *Lecciones de física. Mecánica 1*. Barcelona: Autor.
- Ortega, M. R. (2011). *Lecciones de física. Mecánica 2*. Barcelona: Autor.
- Serway, R. A. y Jewett, J. W. (2018). *Física para ciencias e ingeniería con Física Moderna* (vol. 2). México: Cengage Learning Editores.
- Tipler, P. A. y Mosca, G. (2010). *Física para la ciencia y la tecnología. Mecánica, oscilaciones y ondas, termodinámica* (6<sup>º</sup> ed., vol. 1). Barcelona: Editorial Reverté.
- Tipler, P. A. y Mosca, G. (2010). *Física para la ciencia y la tecnología. Electricidad y magnetismo/luz* (6<sup>º</sup> ed., vol 2.). Barcelona: Editorial Reverté.
- Young, H. D. y Freedman, R. A. (2018). *Física Universitaria* (vol. 1). México. Pearson Educación.
- Young, H. D. y Freedman, R. A. (2018). *Física Universitaria* (vol. 2). México. Pearson Educación.

## Experiencia personal

Normalmente los trabajos que he realizado en este máster han sido mucho más encorsetados que este que ahora mismo presento. En ese sentido poder elegir un tema con el que desde el desconocimiento teórico llevo trabajado desde el año 1999. Y esa ha sido mi motivación, el conocer más a fondo las fórmulas que utilizo cada día en mi ingeniería.

En Castellón de la Plana, a fecha firma digital

Sergio Vicente Cayuela Garcia  
Maestría en Ingeniería Eléctrica  
UM83197SY92415